**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID**
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2023-2024**

**MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

**MODELO.**

**INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN**

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
**DURACIÓN:** 90 minutos.



1. (2 puntos) Se consideran las matrices $A$ y $B$ dadas por

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

   *a*) Determine los valores de los parámetros $a, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica

$$A \cdot B = 6B$$

   *b*) Para $a = 1$ y $c = -1$, calcule $B^t \cdot A \cdot B$, donde $B^t$ denota la matriz transpuesta de $B$.

2. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - a, \qquad a \in \mathbb{R}$$

   *a*) Obtenga el valor del parámetro real $a$ para que la función $f(x)$ tenga una primitiva que pase por los puntos $(0, 1)$ y $(-1, 1/4)$. Señale la expresión de esta primitiva.
   *b*) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función clasificando, si procede, los extremos relativos de la función.

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x^2-1)}{(x-1)} & si \quad x < 1 \\ & \\ (x^2 + 2x + 1) & si \quad x \geq 1 \end{cases},$$

   *a*) Estudie la continuidad de la función $f(x)$ e indique el tipo de discontinuidad si procede.
   *b*) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4}$$

   *a*) Determine las asíntotas de esta función.
   *b*) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = -1$.

5. (2 puntos) Se desea vender batido de chocolate y batido de fresa en una fiesta escolar para recaudar fondos para el viaje de fin de curso. Con la leche de la que se dispone se pueden elaborar 35 litros de batido, y hay cacao en polvo para 30 litros de batido de chocolate como máximo. Se necesitan 15 minutos de preparación por litro de batido de chocolate y 20 minutos por litro de batido de fresa para que tengan la textura correcta. Los batidos tienen que estar listos en 10 horas. Solo hay una batidora y el beneficio que se obtendrá por litro de batido de chocolate es de 10 euros, y por litro de batido de fresa de 11 euros. ¿Cuántos litros de cada tipo de batido se deben producir para maximizar los beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?

6. (2 puntos) Una caja de Lego contiene un total de 50 piezas de tres tipos diferentes (A, B , C). La cantidad de piezas del tipo A más la del tipo B es igual a cuatro veces la cantidad del tipo C. Si a las piezas del tipo A le sumamos el doble de las piezas del tipo B y cuatro veces las del tipo C, el total de piezas de la caja sería de 100. Plantee un sistema de ecuaciones para saber la cantidad de piezas de cada tipo que contendrá la caja.

7. (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real $a$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2x - a\,y & = & a \\ a^3x - y & = & 1 \end{array}\right.$$

   *a*) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro $a$.
   *b*) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 2$.

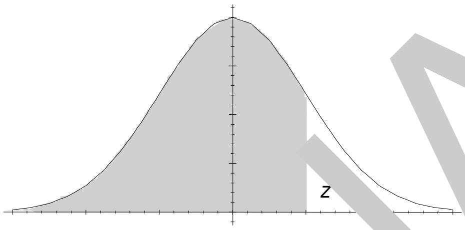
8. (2 puntos) Un estudio europeo sobre hábitos de uso de internet indica que el $62\,\%$ de los hombres españoles mayores de 16 años participa en redes sociales y que el $81\,\%$ lee noticias en internet. Además, el $95\,\%$ de los hombres de este estudio participa en redes sociales o lee noticias en internet. Eligiendo un hombre español mayor de 16 años al azar, calcule la probabilidad de que:
   *a*) Participe en redes sociales y lea noticias en internet.
   *b*) No participe en redes sociales, sabiendo que no lee noticias en internet.

9. (2 puntos) Se sabe que la proporción de hogares españoles con dos o más ordenadores es $p = 0,75$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 140$ hogares. Determine:
   *a*) El número esperado de hogares que no tendrán dos o más ordenadores en la muestra elegida.
   *b*) La probabilidad de que, en la muestra de 140 hogares, el número de ellos con dos o más ordenadores sea entre 98 y 112 hogares.

10. (2 puntos) Durante el adiestramiento de un perro para encontrar trufas, se le deja libre una vez al día en una zona de monte apropiada para encontrar este preciado hongo. En cada operación de búsqueda del animal se ha observado que este se dirige siempre hacia una de tres zonas de monte diferentes, denominadas $A$, $B$ y $C$. En dos de cada diez operaciones de búsqueda se dirige hacia $A$, en cinco de cada diez hacia $B$ y el resto hacia $C$. El perro detecta trufas en $A$ un $35\,\%$ de las veces, un $15\,\%$ en $B$ y un $40\,\%$ en $C$. Eligiendo al azar un perro en adiestramiento, calcule la probabilidad de que:
    *a*) Detecte una trufa en una operación de búsqueda.
    *b*) Sabiendo que ha encontrado una trufa, esta haya sido encontrada en la zona $B$.

## ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.




| *z* | ,00 | ,01 | ,02 | ,03 | ,04 | ,05 | [illegible] | ,07 | ,08 | ,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | [illegible] | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| **0,1** | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | [illegible] | 0,5636 | [illegible] | 0,5714 | 0,5753 |
| **0,2** | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | [illegible] | 0,6026 | [illegible] | 0,6103 | 0,6141 |
| **0,3** | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | [illegible] | 0,6406 | [illegible] | 0,6480 | 0,6517 |
| **0,4** | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| **0,5** | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | [illegible] | [illegible] | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| **0,6** | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| **0,7** | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| **0,8** | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | [illegible] | [illegible] | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| **0,9** | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | [illegible] | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| **1,0** | 0,8413 | 0,8438 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| **1,1** | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| **1,2** | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| **1,3** | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | [illegible] | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| **1,4** | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| **1,5** | 0,9332 | [illegible] | 0,9357 | [illegible] | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| **1,6** | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | [illegible] | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| **1,7** | 0,9554 | 0,9564 | [illegible] | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| **1,8** | 0,9641 | 0,9649 | [illegible] | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| **1,9** | 0,9713 | 0,9719 | [illegible] | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| **2,0** | [illegible] | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| **2,1** | [illegible] | [illegible] | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| **2,2** | [illegible] | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| **2,3** | [illegible] | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| **2,4** | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| **2,5** | [illegible] | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| **2,6** | [illegible] | 0,9954 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| **2,7** | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| **2,8** | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| **2,9** | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| **3,0** | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

# CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

**Ejercicio 1.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Cálculo correcto de AB ........................................ 0,50 puntos.
- Obtención correcta de los parámetros ........................................ 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Obtención correcta de la traspuesta ........................................ 0,25 puntos.
- Realiza correctamente el producto ........................................ 0,75 puntos.

**Ejercicio 2.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Planteamiento correcto ........................................ 0,25 puntos
- Determinación de la primitiva ........................................ 0,25 puntos.
- Cálculo correcto de la constante de integración ........................................ 0,25 puntos
- Cálculo correcto del parámetro ........................................ 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Determinación correcta de la derivada ........................................ 0,25 puntos.
- Determinación correcta de los intervalos ........................................ 0,25 puntos
- Determinación correcta de abscisas de extremos y su clasificación ........ 0,50 puntos.

**Ejercicio 3.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Planteamiento correcto de la condición de continuidad en $x \neq 1$ ......... 0,25 puntos.
- Planteamiento correcto de la condición de continuidad en $x = 1$ ......... 0,25 puntos
- Cálculo correcto de los límites laterales ........................................ 0,25 puntos
- Determinación correcta de la discontinuidad ........................................ 0,25 puntos

Apartado (b): 1 punto.

- Planteamiento correcto de la integral y los límites de integración ......... 0,25 puntos.
- Cálculo correcto de la integral indefinida ........................................ 0,50 puntos.
- Cálculo correcto de la integral definida ........................................ 0,25 puntos

**Ejercicio 4.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Discusión correcta de la no existencia de asíntotas horizontales ........... 0,25 puntos
- Obtención correcta de la asíntota vertical ........................................ 0,25 puntos
- Obtención correcta de la asíntota oblicua ........................................ 0,50 puntos

Apartado (b): 1 punto.

- Expresión correcta de la ecuación de la recta tangente ........................... 0,25 puntos.
- Cálculo correcto de la pendiente de la tangente ........................................ 0,50 puntos.
- Ecuación correcta de la recta tangente ........................................ 0,25 puntos.

**Ejercicio 5.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

- Representación correcta de la región factible ........................................ 0,75 puntos.
- Obtención correcta de los vértices ........................................ 0,75 puntos.
- Encontrar el punto de valor máximo y su valor ........................................ 0,50 puntos.

**Ejercicio 6.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

- Planteamiento correcto de las ecuaciones ........................................ 1 punto.
- Resolución correcta del sistema ........................................ 1 punto.

**Ejercicio 7.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Determinación correcta del valor crítico ........................................ 0,50 puntos.

Discusión correcta .................................................................. 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Solución correcta del sistema ................................................ 1,00 punto.

**Ejercicio 8.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad ................................... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.......................................... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad ................................... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.......................................... 0,50 puntos.

**Ejercicio 9.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Expresión correcta de la distribución ....................................... 0,25 puntos.

Planteamiento correcto ........................................................... 0,25 puntos.

Obtención correcta de la media ................................................ 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión correcta de la aproximación a la distribución normal ........... 0,25 puntos.

Planteamiento correcto de la probabilidad ................................... 0,25 puntos.

Tipificación correcta de la variable .......................................... 0,25 puntos

Determinación correcta de la probabilidad.................................... 0,25 puntos

**Ejercicio 10.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad ................................... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.......................................... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad ................................... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.......................................... 0,50 puntos.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

ORIENTACIONES PARA LA EVALUACIÓN DEL ACCESO A LA UNIVERSIDAD DE LA ASIGNATURA MATEMÄTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II.

Para la elaboración de las pruebas se seguirán las características, el diseño y el contenido establecido en el currículo básico de las enseñanzas del segundo curso de bachillerato LOMLOE que está publicado en el Real Decreto 243/2022, de 5 de Abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato, así como en los contenidos para la Asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II del segundo curso de Bachillerato incluidos en el Decreto 64/2022 de 20 Julio, del Consejo de Gobierno.

Se considerarán, por lo tanto, los siguientes bloques:

## A. Números y operaciones (con un peso de 1/10).

**1. Operaciones**.

- Adición y producto de matrices: interpretación, comprensión y aplicación adecuada de las propiedades.
- Cálculo de determinantes mediante la regla de Sarrus.
- Cálculo de la inversa de una matriz cuadrada mediante determinantes.
- Estrategias para operar con números reales y matrices: cálculo mental o escrito en los
- casos sencillos y con herramientas tecnológicas en los casos más complicados.

**2. Relaciones**.

- Conjuntos de matrices: estructura, comprensión y propiedades.
- Determinantes: definición y propiedades.
- Matriz inversa: definición y propiedades.
- Comprensión de las permutaciones, las combinaciones y las variaciones como técnicas de conteo.

## B. Medida y geometría (con un peso de 3/10).

**1. Medición**.

- Interpretación de la integral definida como el área bajo una curva.
- Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicación al cálculo de áreas.
- Cálculo de primitivas inmediatas simples y compuestas. Regla de Barrow.
- La probabilidad como medida de la incertidumbre asociada a fenómenos aleatorios: interpretaciones subjetivas, clásicas y frecuentistas.

**2. Cambio.**

- Límite de una función en un punto: cálculo gráfico y analítico. Resolución de indeterminaciones (0/0, k/0, ∞–∞, 1∞). Límites laterales.
- Límite de una función en el infinito. Cálculo gráfico y analítico. Resolución de indeterminaciones.
- Determinación de las asíntotas de una función racional o de una función definida a trozos.
- Estudio de la continuidad de una función (incluyendo funciones definidas a trozos). Tipos de discontinuidades.
- Derivada: interpretación y aplicación al cálculo de límites. Regla de L´Hôpital.
- Derivación de funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas. Reglas de derivación de las operaciones elementales con funciones y regla de la cadena.
- Estudio de la derivabilidad de una función (incluyendo funciones definidas a trozos).
- Relación entre derivabilidad y continuidad de una función en un punto. Derivadas laterales.
- Aplicaciones de las derivadas: ecuación de la recta tangente a una curva en un punto de la misma; cálculo de los coeficientes de una función para que cumpla una serie de propiedades.
- La derivada como razón de cambio en resolución de problemas de optimización en contextos diversos.
- Aplicación de los conceptos de límite y derivada a la representación y al estudio de situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante funciones.
- Obtención de extremos relativos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento y decrecimiento e intervalos de concavidad y convexidad de una función.
- Teorema de Bolzano, Teorema del Valor Medio (caso particular es el Teorema de Rolle). Demostración del TVM.

## C. Álgebra(con un peso de 3/10).

**1. Patrones.**

- Generalización de patrones en situaciones diversas.

**2. Modelo matemático**.

- Relaciones cuantitativas en situaciones complejas: estrategias de identificación y determinación de la clase o clases de funciones que pueden modelizarlas.
- Sistemas de ecuaciones: modelización de situaciones en diversos contextos.
- Técnicas y uso de matrices para, al menos, modelizar situaciones en las que aparezcan sistemas de ecuaciones lineales o grafos.
- Utilización de las matrices para representar datos estructurados y situaciones de contexto real.
- Programación lineal: modelización de problemas reales y resolución mediante herramientas digitales.
- Determinación gráfica de la región factible y cálculo analítico de los vértices de la misma, así como de la solución óptima.

**3.Igualdad y desigualdad.**

- Formas equivalentes de expresiones algebraicas en la resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones, mediante cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, y con herramientas digitales.
- Regla de Cramer para la resolución de sistemas compatibles (determinados o indeterminados) de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.
- Resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones en diferentes contextos.
- Resolución de ecuaciones matriciales mediante el uso de la matriz inversa y mediante su transformación en un sistema de ecuaciones lineales.

**4. Elementos de álgebra lineal.**

- Estudio del rango de una matriz que depende de un parámetro real por determinantes (a lo sumo de orden 3).
- Teorema de Rouché-Frobenius para la discusión de un sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real.

**5. Relaciones y funciones.**

- Representación, análisis e interpretación de funciones con herramientas digitales.
- Propiedades de las distintas clases de funciones: comprensión y comparación.
- Estudio y representación gráfica de funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas y definidas a trozos sencillas a partir de sus propiedades globales y locales obtenidas empleando las herramientas del análisis (límites y derivadas).

**6. Pensamiento computacional.**

- Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de las Ciencias Sociales empleando las herramientas o los programas más adecuados.
- Análisis algorítmico de las propiedades de las operaciones con matrices y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

**D. Estadística(con un peso de 3/10).**

**1. Incertidumbre.**

- Cálculo de probabilidades en experimentos compuestos. Probabilidad condicionada e independencia de sucesos aleatorios. Diagramas de árbol y tablas de contingencia.
- Teoremas de la probabilidad total y de Bayes: resolución de problemas e interpretación del teorema de Bayes para actualizar la probabilidad a partir de la observación y la experimentación y la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.
- Planteamiento y resolución de problemas que requieran del manejo de los axiomas de la probabilidad de Kolmogorov o del trazado de diagramas de Venn.
- Planteamiento y resolución de problemas de contexto real que requieran del empleo de los teoremas de la probabilidad total y de Bayes o del trazado de diagramas de árbol.

**2. Distribuciones de probabilidad.**

- Variables aleatorias discretas y continuas. Parámetros de la distribución. Distribuciones binomial y normal.
- Modelización de fenómenos estocásticos mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal. Cálculo de probabilidades asociadas mediante herramientas tecnológicas.

- Condiciones bajo las cuales se puede aproximar la distribución binomial por la distribución normal.
- **Inferencia.**
- Conceptos de población y muestra. Parámetros poblacionales y estadísticos muestrales.
- Selección de muestras representativas. Técnicas de muestreo. Representatividad de una muestra según su proceso de selección.
- Estimación puntual y estimación por intervalo.
- Estimación de la media, la proporción y la desviación típica. Aproximación de la distribución de la media y de la proporción muestrales por la normal.
- Intervalos de confianza basados en la distribución normal: construcción, análisis y toma de decisiones en situaciones contextualizadas. Aplicación en la resolución de problemas.
- Intervalo de confianza para la media de una distribución normal con desviación típica conocida. Cálculo del tamaño muestral mínimo.
- Relación entre confianza, error y tamaño muestral.
- Herramientas digitales en la realización de estudios estadísticos.
- Lectura y comprensión de la ficha técnica de una encuesta.
- Grado de relación entre dos variables estadísticas. Regresión lineal.

# SOLUCIONES

1. *a*)

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2+c \\ 2+a+c \\ 5+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+c=4 \\ c^2-6c+5=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c=1,\ a=3 \\ c=5,\ a=-1 \end{cases}$$

   *b*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-2)$$

2. *a*)

$$F(x) = \int f(x)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - ax + c$$

$$F(0) = c = 1$$

$$F(-1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + a + c = 1/4$$

   Entonces $c = 1$ y $a = -1/6$. La primitiva es, por tanto:

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + (1/6)x + 1$$

   *b*) Para $a = 1$, $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

   - $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$
   - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad y \quad x = 1/3$
   - $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1), (1/3, +\infty)$
   - $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1/3)$

   En consecuencia tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1/3$.

3. *a*) La función $f(x)$ es continua en cualquier punto $x \neq 1$. Por tanto, basta analizar la situación en $x = 1$

$$lim_{x\to 1^-} \frac{(x^2-1)}{(x-1)} = \frac{0}{0} = \text{L'Hôpital} = lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{1} = 2$$

$$lim_{x\to 1^+}(x^2 + 2x + 1) = 4$$

   La función presenta, por tanto, una discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

   Nota: El límite del primer tramo también podría haberse calculado como:

$$lim_{x\to 1^-} \frac{(x^2-1)}{(x-1)} = lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)}{1} = 2$$

   *b*) El area pedida es:

$$F(x) = \int_1^2 (x^2 + 2x + 1)dx = \left| \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x \right|_1^2 = 6,33\hat{3}u^2.$$

4. *a*)

$$f(x)=\frac{x^3+4x}{x^2-4}=\frac{x(x^2+4)}{(x-2)(x+2)}$$

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$$

Por tanto, tiene asíntotas verticales en $x=-2$ y en $x=2$.
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x(x^2+4)}{x^2-4}=+\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x(x^2+4)}{x^2-4}=-\infty$$

La función $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.
Asíntotas oblicuas: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4}{x^2-4}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x(x^2+4)}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x}{x^2-4}=0$$

Entonces, la función $f(x)$ tiene asíntota oblicua en $y=x$.

*b*) Ecuación de la recta tangente a la gráfica en $x_0=-1$ :

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$y_0=f(-1)=5/3$$

$$f'(x)=\frac{x^4-16x^2-16}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(-1)=-31/9$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x_0=-1$ será:

$$y-\frac{5}{3}=\frac{-31}{9}(x+1)$$

5. Sea $x$ : litros de batido de chocolate elaborados, e $y$ : litros de batido de fresa elaborados. Entonces:

$$S=\{x+y\leq 35, x\leq 30, 15x+20y\leq 600, x\geq 0, y\geq 0\}\,,$$

con vértices $A=(0,0)$, $B=(0,30)$, $C=(20,15)$ , $D=(30,5)$ y $E=(30,0)$.
La función beneficio es $B(x,y)=10x+11y$. Evaluamos en los vértices de la región factible obtenidos:

- $B(0,0)=0$
- $B(0,30)=330$
- $B(20,15)=365\rightarrow$ Máximo
- $B(30,5)=355$
- $B(30,0)=300$

Se deben elaborar 20 litros de batido de chocolate y 15 litros de batido de fresa. El beneficio obtenido será de 365 euros.

6. Sean $x$ =piezas tipo A, $y$ =piezas tipo B y $z$ =piezas tipo C.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 50 \\ x+y-4z & = & 0 \\ x+2y+4z & = & 100 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 100 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 50 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2-f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & -5 & -50 \\ 0 & 1 & 3 & 50 \end{array}\right)$$

Se obtiene entonces que $y=20$, $z=10$ y $x=20$.

7. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real $a$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2x-a\,y & = & a \\ a^3x-y & = & 1 \end{array}\right.$$

*a*) $|A|=-a^2+a^4=a^2(-1+a^2)=0 \Longleftrightarrow a=0, a=\pm 1$

Si $a\neq \pm 1, 0 \Longrightarrow Rg(A)=Rg(A|B)=2 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.
Si $a=0$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{rr|r} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow Rg(A)=Rg(A|B)=1 \Longrightarrow \text{ Compatible Indeterminado.}$$

Si $a=1$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow Rg(A)=1=Rg(A|B)=1 \Longrightarrow \text{ Compatible Indeterminado.}$$

Si $a=-1$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow Rg(A)=1=Rg(A|B)=1 \Longrightarrow \text{ Compatible indeterminado.}$$

*b*)

$$(A|B)=\left(\begin{array}{rr|r} 4 & -2 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2-2f_1} \left(\begin{array}{rr|r} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Por tanto, $x=0, \quad y=-1.$

8. Sea $R$ ='participar en redes sociales' y $L$ ='leer noticias en internet'. Sabemos que $P(R)=0{,}62$, $P(L)=0{,}81$ y $P(R\cup L)=0{,}95$.

*a*) Por definición $P(R\cup L)=P(R)+P(L)-P(R\cap L)$, entonces

$$P(R\cap L)=P(R)+P(L)-P(R\cup L)=0{,}62+0{,}81-0{,}95=0{,}48.$$

*b*) Sea $\bar{R}$ el suceso complementario de $R$ y $\bar{L}$ el suceso complementario de $L$. La probabilidad pedida es:

$$P(\bar{R}\mid\bar{L})=\frac{P(\bar{R}\cap\bar{L})}{P(\bar{L})}.$$

Calculamos

$$P(\bar{R}\cap\bar{L})=P(\overline{R\cup L})=1-P(R\cup L)=1-0{,}95=0{,}05.$$

Por lo tanto,

$$P(\bar{R}\mid\bar{L})=\frac{0{,}05}{1-0{,}81}=0{,}263.$$

9. Se tiene que la variable aleatoria número de hogares con dos o más ordenadores sigue una distribución $X \sim Bin(140; 0{,}75)$.
   *a*) $E[X] = n * p = 105$ hogares tendrán dos o más ordenadores. Por lo tanto, 35 hogares no los tendrán.
   *b*) Se cumple que $n \geq 30, np \geq 5, nq \geq 5$, por lo tanto, podemos utilizar la aproximación a la distribución Normal y tenemos que $X \sim N(105; 5{,}1235)$. La probabilidad pedida puede calcularse, entonces, como:

$$P[98 < X < 112] = P\left[\frac{98-105}{5,1235} < z < \frac{112-105}{5,1235}\right] =$$
$$= P[-1{,}37 < z < 1,37] = 0,9147 - (1 - 0{,}9147) = 0,8294.$$

10. Definimos los sucesos: $A =$ 'perro va a zona de monte $A$', $B =$ 'perro va a zona de monte $B$', $C =$ 'perro va a zona de monte $C$' y $D =$ 'perro detecta una trufa'.
   *a*) La probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) + P(D \mid C)P(C) \\ &= 0{,}35 \cdot 0{,}2 + 0{,}15 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}265. \end{aligned}$$

   *b*) La probabilidad pedida es:

$$P(B \mid D) = \frac{P(D \mid B)P(B)}{P(D)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}5}{0{,}265} = 0{,}283.$$