MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En todos los ejercicios, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido o razonamiento que conduzca a la solución del problema será valorado con la puntuación correspondiente.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Calcular el determinante 0.5 puntos (repartido en procedimiento: 0.25; cálculos: 0.25). Obtener los valores que lo anulan: 0.5 puntos.
b) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.

Ejercicio 2.

a) Elegir adecuadamente la rama a derivar: 0.25 puntos. Calcular $f'(0)$: 0.25 puntos.
b) Valores de $f(\pi)$ y $f'(\pi)$: 0.5 puntos. Ecuación de la recta tangente: 0.5 puntos.
c) Justificar que $f(x) > 0$ para $x \in (\pi, 2\pi)$: 0.25 puntos. Escribir (sin el valor absoluto) la integral a calcular: 0.25 puntos. Calcular la primitiva: 0.25 puntos. Aplicar la regla de Barrow: 0.25 puntos.

Ejercicio 3.

a) Procedimiento seguido: 1 punto. Cálculos: 0.5 puntos.
b) Determinar los vértices del triángulo: 0.5 puntos. Calcular el área: 0.5 puntos.

Ejercicio 4.

a) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.
b) Procedimiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.
c) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.

a) Por la obtención de los valor críticos ($m = 0$, $m = 1$): 0.5 puntos (repartidos en planteamiento: 0.25; resolución: 0.25). Por discutir el sistema en cada uno de los tres casos ($[m = 1]$, $[m = 0]$, $[m \neq 1, m \neq 0]$): 0.5 puntos.
b) Procedimiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.

Ejercicio 2.

a) Escribir la integral a calcular: 0.25 puntos. Obtener la primitiva 0.5 puntos. Regla de Barrow: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos, calcular f' y f'': 0.5 puntos. Obtener el máximo 0.25 puntos.
c) Saber qué límite hay que calcular: 0.25 puntos. Calcular el límite: 0.25 puntos.

Ejercicio 3.

a) Resultado: 0.5 puntos. Justificación: 0.5 puntos.
b) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.
c) Procedimiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.

Ejercicio 4.

a) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.
b) Procedimiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.
c) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.

MATEMÁTICAS II—SOLUCIONES
OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) Para que la matriz $A - mI$, admita inversa, su determinante debe ser no nulo.

$$\det(A - mI) = -m(3-m)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0,\, m = 3$$

Luego $A - mI$ admite inversa para todo $\boxed{m \in \mathbb{R} - \{0,3\}}$.

b) Si $B = A - 2I$, es $\det(B) = -2$ y $B^{-1} = -\frac{1}{2}Adj(B)^t = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2

Hay que tener en cuenta que

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos(x) + 1 - x \text{ si } x \le 1 \\ 2\cos(x) + x - 1 \text{ si } x > 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \begin{cases} -2\,\mathrm{sen}\,(x) - 1 \text{ si } x < 1 \\ -2\,\mathrm{sen}\,(x) + 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

a) Evaluando, se tiene que $f'(0) = -1$.

b) Como $f(\pi) = \pi - 3$ y $f'(\pi) = 1$, la ecuación de la recta tangente es $y = \pi - 3 + (x - \pi)$. Es decir $\boxed{y = x - 3}$.

c) Para $x \in (\pi, 2\pi)$ es $f(x) = 2\cos(x) + x - 1 > 0$, pues $x - 1 > 2 \ge 2\cos(x)$, luego el área pedida viene determinada por

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx = \int_{\pi}^{2\pi} (2\cos(x) + x - 1)\,dx = \left[2\,\mathrm{sen}\,(x) + \frac{x^2}{2} - x\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{3\pi^2}{2} - \pi$$

Ejercicio 3

a) Los puntos de la recta r equidistantes de los dos planos deben satisfacer

$$\frac{|3(1-2t) + (-1+t) + 2(1+t) - 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|2(1-2t) - (-1+t) + 3(1+t) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}},$$

lo que equivale a $-3t + 3 = \pm(-2t + 5)$.

Las soluciones son $t = -2$ y $t = 8/5$, que corresponden a los puntos $\boxed{P_1(5, -3, -1) \text{ y } P_2(-11/5, 3/5, 13/5)}$ respectivamente.

b) El punto de intersección de r con π_1 satisface $3(1-2t) + (-1+t) + 2(1+t) - 1 = 0$, es decir es el punto $A(-1, 0, 2)$ (que corresponde a $t = 1$).

El punto de intersección de r con π_2 satisface $2(1-2t) - (-1+t) + 3(1+t) - 1 = 0$, es decir es el punto $B(-4, 3/2, 7/2)$ (que corresponde a $t = 5/2$).

El área del triángulo es $\boxed{S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}| = \frac{3\sqrt{35}}{4}}$.

Ejercicio 4

La variable aleatoria X (peso de los estudiantes), tiene una distribución $N(74, 6)$. Sea $Z = \frac{X-74}{6}$ la correspondiente variable $N(0,1)$.

a) $p(68 \le X \le 80) = p\left(\frac{68-74}{6} \le Z \le \frac{80-74}{6}\right) = p(-1 \le Z \le 1) = p(Z \le 1) - p(Z \le -1) = 2p(z \le 1) - 1 \approx 0.6826$. Por tanto $\boxed{\text{el } 68.26\%}$ de los estudiantes tendrán un peso entre 68 y 80 kilos.

b) $p(X > 80) = 1 - p(X \le 80) = 1 - p(Z \le 1) \approx 1 - 0.8413 \approx 0.1587$. Por tanto, el 15.87% de los estudiantes, es decir unos $\boxed{\text{238 estudiantes}}$ pesarán más de 80kg.

c) Se trata de calcular la probabilidad condicionada

$$p(X > 86/X > 76) = \frac{p(X > 86) \cap (X > 76)}{p(X > 76)} = \frac{p(X > 86)}{p(X > 76)} = \frac{p(Z > 2)}{p(Z > 1/3)} = \frac{1 - p(Z \le 2)}{1 - p(Z \le 1/3)} \approx \frac{0.0228}{0.3707} \approx 0.0615$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1

a) El determinante de la matriz de coeficientes, $\det(A) = -m^2 + m$, se anula si $m = 1$ o $m = 0$ y se tiene:

$$(A;B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & 1 & 1-m \\ 0 & m-1 & m-1 & 1+m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & 1 & 1-m \\ 0 & 0 & m-2 & 2m \end{array}\right)$$

Para $m \neq 0, 1$, es $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A;B)$ y el sistema es compatible determinado.
Si $m = 0$, es $\operatorname{rg}(A) = 2$, $\operatorname{rg}(A;B) = 3$ y el sistema es incompatible.
Si $m = 1$, es $\operatorname{rg}(A) = 2$, $\operatorname{rg}(A;B) = 3$ y el sistema es incompatible.

b) La solución para $m = -1$ es $\boxed{x = 1, y = 2, z = -2}$.

Ejercicio 2

a) El área pedida viene dada por

$$\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 ((6-x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1)\,dx = \left[(27-3x)e^{\frac{x-4}{3}} - x\right]_2^4 = 13 - \frac{21}{e^{2/3}}$$

b) Se trata de encontrar el máximo de la función pendiente, $f'(x) = -\frac{1}{3}(x-3)e^{\frac{x-4}{3}}$, para lo que calculamos $f''(x) = -\frac{1}{9}xe^{\frac{x-4}{3}}$, que se anula solamente en $x = 0$, es positiva en $x < 0$ y negativa en $x > 0$. Por lo que el punto de pendiente máxima es el de abscisa $\boxed{x = 0}$.

c) La asíntota horizontal será $y = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{6-x}{e^{(4-x)/3}}$. Calculamos este límite usando la regla de L'Hôpital: $\lim_{x \to -\infty} \frac{6-x}{e^{(4-x)/3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\frac{-1}{3}e^{(4-x)/3}} = 0 \Rightarrow$ la asíntota es $\boxed{y = -1}$.

Ejercicio 3

a) El punto simétrico de B, respecto a π_2 es $B'(1,1,1)$, ya que la recta perpendicular al plano es el eje OX y el punto medio entre B y B' es $(0,1,1)$, que está en π_2.

b) Un vector director de la recta pedida se puede obtener como producto vectorial de los vectores normales a los dos planos, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (1,1,0) \times (1,0,0) = (0,0,-1)$. Se obtiene la recta $\boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}}$.

c) El ángulo α formado por los dos planos es el ángulo agudo que forman sus vectores normales.

$$\cos(\alpha) = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego forman un ángulo de $\pi/4$ radianes.

Ejercicio 4

Se consideran los sucesos: F_1 (el primer caramelo extraido es de fresa), F_2 (el segundo caramelo es de fresa), M_1 (el primer caramelo es de menta) y L_1 (el primer caramelo es de limón).

a) $p(F_2) = p(F_2/F_1)p(F_1) + p(F_2/M_1)p(M_1) + p(F_2/F_1)p(F_1) + p(F_2/L_1)p(L_1) = \frac{9}{29}\frac{10}{30} + \frac{10}{29}\frac{15}{30} + \frac{10}{29}\frac{5}{30} = \frac{1}{3}$.

b) $p(F_1 \cap F_2) = p(F_1)p(F_2/F_1) = \frac{3}{29}$.

c) $p(F_1/F_2) = \frac{p(F_1 \cap F_2)}{p(F_2)} = \frac{3/29}{1/3} = \frac{9}{29}$.

DOCUMENTO DE ORIENTACIONES PARA LA EvAU

Matemáticas II. Curso 2017/2018

ESTRUCTURA DEL EXAMEN

El examen constará de **cuatro problemas igualmente ponderados,** cada uno de ellos relativo a uno de los cuatro bloques con contenido específico del currículo oficial de MATEMÁTICAS II, 2º Bachillerato: ÁLGEBRA, ANÁLISIS, GEOMETRÍA y PROBABILIDAD.

CONTENIDOS

Las pruebas se elaborarán de acuerdo con las matrices de contenidos recogidos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre. Además según las especificaciones de estándares de aprendizaje evaluables de la orden ECD/1941/2016, de 22 de diciembre y con el Decreto 52/2015, de 21 de mayo de la Comunidad de Madrid, se podrá pedir en las mismas la realización de tareas similares a las siguientes:

ÁLGEBRA

- Usar matrices como herramienta para representar datos estructurados y sistemas de ecuaciones lineales.
- Realizar operaciones con matrices y aplicar propiedades.
- Calcular determinantes de orden menor o igual que 4 y manejar las propiedades elementales.
- Calcular la inversa de una matriz cuadrada de orden no superior a tres. Usar adecuadamente las propiedades de la matriz inversa.
- Calcular el rango de una matriz de orden no superior a 4, por determinantes o por el método de Gauss. Estudiar el rango de una matriz que dependa como máximo de un parámetro.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales. Discutir las soluciones de un sistema lineal, dependiente de un parámetro.
- Plantear y resolver problemas que simulen situaciones de la vida real, cuya solución pueda obtenerse a partir de un sistema lineal de, como máximo, tres ecuaciones con tres incógnitas.

ANÁLISIS

- Calcular el límite de una función en un punto y en el infinito. Calcular límites laterales y resolver indeterminaciones sencillas.
- Interpretar el significado de la continuidad y la discontinuidad. Identificar funciones continuas y tipos de discontinuidad. Manejar operaciones algebraicas con funciones continuas y composición de funciones continuas.
- Usar el teorema de Bolzano para localizar soluciones de una ecuación.
- Manejar y saber interpretar el concepto de derivada de una función en un punto. Manejar las propiedades de la derivación y calcular derivadas.

- Usar derivadas para estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento y valores extremos. Plantear y resolver de problemas de optimización.
- Conocer y aplicar los resultados del Teorema de Rolle, el Teorema del Valor Medio y la regla de L'Hôpital.
- Calcular primitivas inmediatas y de funciones que sean derivadas de una función compuesta. Integrar por partes y mediante cambio de variables (ejemplos simples). Integrar funciones racionales (con denominador de grado no mayor que dos).
- Calcular áreas de recintos limitados por rectas o curvas sencillas.

GEOMETRÍA

- Operar con vectores del espacio tridimensional. Estudiar la dependencia e independencia lineal. Manejar los conceptos de base y coordenadas.
- Manejar el producto escalar: definición, propiedades e interpretación geométrica; vectores unitarios, ortogonales y ortonormales.
- Calcular el ángulo entre dos vectores.
- Manejar el producto vectorial: definición, propiedades e interpretación geométrica.
- Manejar el producto mixto de tres vectores: definición, propiedades e interpretación geométrica.
- Aplicar los distintos productos al cálculo de áreas y volúmenes.
- Obtener ecuaciones de rectas en el espacio, en cualquiera de sus formas. Obtener ecuaciones de planos. Estudiar la posición relativa de puntos, rectas y planos en el espacio.
- Resolver problemas de geometría afín con rectas y planos.
- Calcular distancias entre puntos rectas y planos, así como ángulos entre dos planos, entre dos rectas que se corten y entre una recta y un plano.

PROBABILIDAD

- Calcular la probabilidad de sucesos aleatorios, mediante la regla de Laplace o las fórmulas de la axiomática de Kolmogorov.
- Calcular probabilidades condicionadas. Usar el teorema de probabilidad total y la fórmula de Bayes.
- Identificar variables aleatorias discretas. Calcular probabilidades de sucesos asociados a una distribución binomial. Calcular la media y la desviación típica de una variable aleatoria con distribución binomial.
- Calcular probabilidades de sucesos que se puedan modelizar mediante una distribución binomial, a partir de su aproximación por la normal.
- Calcular probabilidades de sucesos que pueden modelizarse mediante una distribución normal.